o Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée positive ; O est l'origine d'un repère (T) dont les axes x'Ox, y'Oy, z'Oz admettent respectivement $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ comme vecteurs unitaires. Soit M(u) le point défini par ses coordonnées, fonctions du paramètre u :

$$M(u) \begin{cases} x = 2au \\ y = au^2 \\ z = a\frac{u^3}{3} \end{cases}$$ (a est une constante positive mesure d'une longueur)

u décrivant $\mathbb{R}$, le point M décrit une courbe (C).

1° - On oriente la courbe (C) dans le sens des z croissants et l'on choisit l'origine O de (T) pour origine des abscisses curvilignes s sur (C). Calculer, en fonction de u, l'abscisse curviligne s du point M et déterminer par ses composantes (α, β, γ), fonctions de u, le vecteur unitaire $\vec{T}$ de la tangente orientée en M à (C). Montrer que $\vec{T}$ fait un angle constant avec la direction $\vec{\Delta}$ de cosinus directeurs $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

M se meut sur (C) d'un mouvement uniforme de vecteur vitesse : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v_0 \vec{T}$ (t est le temps ; $v_0 > 0$ est une constante).

Déterminer l'instant $t = t(u)$ en lequel le mobile M (partant de O à l'instant $t = 0$) passe au point de paramètre u. Cette relation est-elle bijective ? Soient λ et μ les points définis par $\overrightarrow{O\lambda} = \vec{T}$ et $\overrightarrow{O\mu} = \vec{V}$. Montrer que les lieux de λ et μ sont deux cercles à préciser.

2° - Calculer, en fonction de u, les composantes du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ du point M. En déduire les composantes $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ du vecteur unitaire $\vec{N}$ de la normale principale et le rayon de courbure R de (C) au point de paramètre u.
Déterminer les composantes $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ du vecteur unitaire $\vec{\mathcal{B}}$ de la binormale et le rayon de torsion $\mathcal{T}$ de (C) au point de paramètre u.

3° - Soient les trois points de (C) : M_1, M_2, M_3 de paramètres u_1, u_2, u_3.
Calculer les coefficients A, B, D de l'équation $Ax + By + z + D = 0$ du plan (M_1, M_2, M_3), en fonction de u_1, u_2 et u_3.
Former l'équation du plan osculateur à (C) au point M_0 (u_0).
Etant donné un point P quelconque de l'espace $[\overrightarrow{OP} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta\vec{k}]$ montrer qu'il passe par P trois plans respectivement osculateurs à (C) en trois points M_1, M_2, M_3. Montrer que les points M_1, M_2, M_3, P sont dans un même plan.

.../...

4° - On change de repère en gardant la même origine O et prenant la nouvelle base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ définie par :

(Ce sont les vecteurs unitaires des nouveaux axes X'OX, Y'OY, Z'OZ)

$$\begin{cases} \vec{I} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \\ \vec{J} = \vec{j} \\ \vec{K} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \end{cases}$$

Ecrire la matrice de passage P de l'ancienne base à la nouvelle base.

Déterminer la matrice inverse P^{-1} de P . Exprimer les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) en fonction des anciennes (x, y, z).

Quelles sont les valeurs propres de P ?

5° - a) - Montrer que :

$$I - P + (\sqrt{2} - 1)\left[P^2 - P^{-1}\right] = 0$$

I et 0 étant les matrices (3,3) unitaire et nulle .

b) - Dans l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des matrices (3,3) on considère le sous-espace $\mathcal{C}$ des matrices fonctions polynômiales de P, soit :

$$\mathcal{C} = \{a_0 I + a_1 P + a_2 P^2 + \ldots\ldots + a_n P^n ; a_i \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(g) = \{I, P, P^2\}$ est partie génératrice de $\mathcal{C}$

Donner la dimension de $\mathcal{C}$

6° - Construire la courbe (C_1) projection orthogonale de (C) sur le plan XOY [Z = 0]

Soit le point M_1 de (C_1) projection du point M de (C). Montrer que les normales principales à (C) en M et à (C_1) en M_1 sont parallèles.

7° - On considère sur (C) le point A de paramètre $U_A = \sqrt{2}$. Ecrire dans le repère défini en 4°, un système d'équations de la tangente à (C) en A, soit (D). On considère une suite de points sur (C) : M_1, M_2 ... M_n, ... ; Mn est le point de paramètre $U_n = \sqrt{2}\left[1 - \frac{1}{n}\right]$. Soit dn la distance de M_N à la tangente (D)

La série $\sum_{n=1}^{\infty}$ dn est-elle convergente ou divergente ?

8° - Le solide (S) attaché au repère de Frenet en M [Origine M, vecteurs unitaires : $\vec{T}, \vec{N}, \vec{\mathcal{B}}$], est en mouvement par rapport au repère (T) ; le mouvement de M sur (C) est encore le mouvement uniforme défini à la question 1°.

Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de (S) par rapport à (T)

$$\vec{\Omega} = p\vec{T} + q\vec{N} + r\vec{\mathcal{B}}$$

Calculer p, q, r au moyen de v_0 et des rayons R de courbure et $\mathcal{T}$ de torsion de (C) au point M. FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail